תורת הקבוצות, תרגיל 13

תרגיל זה עוסק בעיקר בשימושים של הלמה של צורן.

1. הגדר על קבוצת המספרים הטבעיים N יחס סדר מלא שאינו יחס סדר טוב.

2. תהי $(A,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית כך שלכל שרשרת ב- A קיים חסם מלעיל ב- A. יהי $x\in A$. הוכח, כי קיים איבר מקסימלי $a\in A$ כך, שמתקיים $x\leq a$.

3. תהי W קבוצה של תת-קבוצות של קבוצה A. אנו אומרים ש-W היא **בעלת אופי סופי** אם קיים התנאי שלכל קבוצה $B\subseteq A$ B נמצאת ב-W אסם כל קבוצה סופית חלקית ל-B נמצאת ב-W. למשל, אם A היא קבוצת כל הנקודות במישור ו-W היא קבוצת כל הקבוצות B החלקיות ל-A כך שקיים ישר המכיל את כל נקודות B, אז ברור כי ל- $B\subseteq A$ קיים $B\in W$ אסם כל תת קבוצה סופית של B נמצאת ב-W, ואפילו אם כל תת קבוצה בת שלושה איברים של W נמצאת ב-B.
הוכח, באמצעות הלמה של צורן, את המשפט הבא, הידוע בשם הלמה של טוקי.
אם A היא קבוצה ו-W קבוצה לא ריקה בעלת אופי סופי של קבוצות חלקיות ל-A אז יש ב-W קבוצה מקסימלית (ביחס לסדר החלקי $\subseteq$ של ההקפה).

4. תהי $(A,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית. הוכח באמצעות הלמה של צורן או הלמה של טוקי את הטענות הבאות:
א. קיימת ב- A שרשרת B מקסימלית, כלומר קבוצה $B\subseteq A$ כך ש-B סדורה מלא ואף C המקיימת $B\subsetneq C\subseteq A$ אינה סדורה מלא.
ב. קיימת ב-A אנטי-שרשרת מקסימלית, כלומר קבוצה $B\subseteq A$ כך שאף שני איברים של B ניתנים להשוואה, ובכל קבוצה C המקיימת $B\subsetneq C\subseteq A$ יש לפחות שני איברים הניתנים להשוואה.

5. תהי A קבוצה סדורה חלקית. נרצה להרחיב את יחס הסדר החלקי של A ליחס סדר מלא.
א. הוכח, כי ניתן להרחיב את יחס הסדר של A ליחס סדר חלקי מקסימלי על A.
ב. הוכח, כי יחס הסדר שהתקבל הינו יחס סדר מלא על A.

תאריך ההגשה: 19.1.2005